7.

モジュラー形式の係数と Galois 表現

吉川 祥[*1]（学習院大学）

7.1　イントロダクション

本稿では, [4] で必要な Galois 表現の取り扱いについて解説する. [4] のアルゴリズム（[4, Theorem15.2.1]）は, Hecke 作用素 $T_n \in \mathbb{T}(k,1)$ を T_i $(i \leq \frac{k}{12})$ たちの $\mathbb{Z}$ 線型和として書くものであった. そのアイディアは, p を n の素因数とし, 十分多くの極大イデアル $\mathfrak{m} \subset \mathbb{T}(k,1)$ に対して $T_p \bmod \mathfrak{m}$ を計算すれば T_p 自身も復元できるというものである. すなわち, 有限体 $\mathbb{F}$ への十分多くの全射準同形

$$f\colon \mathbb{T}(k,1) \to \mathbb{F}$$

について $f(T_p)$ を計算したいのだが, この計算に Galois 表現を応用するという点が [4] のポイントである. そのために, f から 2 次元法 ℓ Galois 表現

$$\rho_f\colon G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{F})$$

で $f(T_p) = \mathrm{Tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_p))$ を満たすものを構成する. そうすれば $f(T_p)$ を計算するという問題は $\rho_f(\mathrm{Frob}_p)$ を計算する問題に帰着されるのである. この ρ_f の構成について解説するのが本稿の目標となる. （より正確には定理 7.3.8 を参照されたい. ）

-記法と慣例-

体 F に対してその分離閉包 F^{sep} をひとつ固定し, F の絶対 Galois 群

[*1] This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP17H07074

$\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$ を G_F と書く．$\mathbb{Q}$ の実素点を ∞ と書く．素点の有限集合 $S(\ni \infty)$ に対して, すべての $p \in S$ で不分岐な最大部分体を $\mathbb{Q}_S(\subset \bar{\mathbb{Q}})$ と書く．(すなわち, $\mathbb{Q}_S$ は S の外で不分岐な $\mathbb{Q}$ の拡大体すべての合併である．）素数 p に対して, $\mathrm{Frob}_p \in G_{\mathbb{F}_p}$ は p の数論的フロベニウス写像 $\mathrm{Frob}_p(x) = x^p$ をあらわす．$S_k(\Gamma_1(N))$ を $\Gamma_1(N)$ に関するカスプ形式の空間とし, $\mathbb{T}(k, N)$ をその Hecke 環とする．(本報告集の木村氏の論説を踏襲する.）

7.2 Galois 表現の基礎的事項

ここでは Galois 表現について, 言葉の準備等, 必要最低限のことしか述べない．より詳しい内容に興味を持った場合, 例えば [9] や２００９年度整数論サマースクール報告集（ここでは特に [10]）を読むことをお勧めする.

7.2.1 Galois 表現で考える Galois 群について

p を素数とする．まず, $\mathbb{Q}_p$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}_p}$ について簡単に復習する. $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$ とすると, σ は同形 $\sigma\colon \bar{\mathbb{Z}}_p \xrightarrow{\simeq} \bar{\mathbb{Z}}_p$(ただし$\bar{\mathbb{Z}}_p$ は $\bar{\mathbb{Q}}_p$ の整数環) を誘導し, さらに剰余体の間の同形 $\bar{\sigma}\colon \bar{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\simeq} \bar{\mathbb{F}}_p$ を導く．この $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ という対応によって, 全射準同形 $\pi\colon G_{\mathbb{Q}_p} \twoheadrightarrow G_{\mathbb{F}_p}$ が得られる．$I_{\mathbb{Q}_p} = \ker \pi$ とおき, これを p の惰性群と呼ぶ．$I_{\mathbb{Q}_p}$ の固定体 $\bar{\mathbb{Q}}_p^{I_{\mathbb{Q}_p}}$ は $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$ に等しい. 定義により, 完全系列

$$1 \to I_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{F}_p} \to 1$$

があり, 同形

$$G_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p} \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}/\mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$$

がある.

次に, S は素点の有限集合で $\infty \in S$ を満たすものとして, $G_{\mathbb{Q}}$ の商 $G_{\mathbb{Q},S} := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q})$ の性質について説明する. p を素数とすると, 各埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ を決めるごとに単射 $G_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}, g \mapsto g|_{\bar{\mathbb{Q}}}$ が定まる．この単射により, $G_{\mathbb{Q}_p}$ を $G_{\mathbb{Q}}$ の部分群とみなす．ただし, 埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ を取り換えると, この単射は $G_{\mathbb{Q}}$ での共役だけ変わることに注意しよう.

定義により $p \notin S$ ならば $\mathbb{Q}_S$ は p で不分岐なので, 全射 $G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow G_{\mathbb{Q},S}$ による $I_{\mathbb{Q}_p}$ の像は自明である． このとき, 合成 $G_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow G_{\mathbb{Q},S}$ は $G_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{Q},S}$ を誘導する．$G_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ であったから, Frob_p の $G_{\mathbb{Q},S}$ における像（これも再び Frob_p と書く）を考えることができる．実際には埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ の取り方により $\mathrm{Frob}_p \in G_{\mathbb{Q},S}$ は共役で移るため

$G_{\mathbb{Q},S}$ の元としては well-defined ではない．しかし, Frob_p の定める共役類 $[\mathrm{Frob}_p] \subset G_{\mathbb{Q},S}$ は p のみに依存し well-defined となる．この Frobenius 共役類について, 次の定理が重要である．

定理 7.2.1. (Chebotarev の稠密定理) $\bigcup_{p \notin S} [\mathrm{Frob}_p]$ は $G_{\mathbb{Q},S}$ の中で稠密である．

7.2.2 Galois 表現

ここでは, Galois 表現とは $G = G_{\mathbb{Q}}$ または $G_{\mathbb{Q}_p}$ の連続表現で有限次元であるもののみを考える．有限次元に限る理由は, G は副有限（したがってコンパクト）なので, 既約な表現は有限次元となるからである．さらに, 本稿で重要な Galois 表現は 2 次元という事情もある．Galois 表現は, 厳密にはベクトル空間 V とそれへの G の連続作用 $\rho\colon G \to GL(V)$ の組 (V, ρ) のことである．表現空間 V や準同形 ρ を略して単に ρ や V を Galois 表現ということも多い．また, V が n 次元の F ベクトル空間のとき, V の基底を取って $V \simeq F^n$ とし, ρ を $\rho\colon G \to GL_n(F)$ と書くことも多い．表現の係数体 F としては, 主に $\bar{\mathbb{F}}_\ell, \bar{\mathbb{Q}}_\ell, \mathbb{C}$（もしくはその部分体）を考える．係数体 F がこれらで与えられるとき, Galois 表現はそれぞれ法 ℓ 表現, ℓ 進表現, 複素表現と呼ばれる．$G_{\mathbb{Q}}$（より一般に代数体の絶対 Galois 群）の複素表現は特別に Artin 表現と呼ぶのが慣例である．法 ℓ 表現や複素表現はスムーズ表現（表現空間の各元に対する固定部分群が開部分群）となるため, G の有限商を経由する．

$G_{\mathbb{Q}}$ の Galois 表現における Frobenius 作用を考えるために, Galois 表現の不分岐性を定義する．

定義 7.2.2. p を素数とする．$G_{\mathbb{Q}}$ の Galois 表現 (V, ρ) が p で不分岐とは, $I_{\mathbb{Q}_p}$ が V に自明に作用することをいう．（これは, $I_{\mathbb{Q}_p} \subset \ker\rho$ と同値である．）

$G_{\mathbb{Q}}$ の Galois 表現 $\rho\colon G_{\mathbb{Q}} \to GL_n(F)$ のなかで特に重要なものは, ほとんどいたるところ不分岐な Galois 表現である．すなわち, 素点の有限集合 $S(\ni \infty)$ が存在して, 任意の $p \notin S$ に対して p で不分岐となるような Galois 表現である．このような ρ は $\rho\colon G_{\mathbb{Q},S} \to GL_n(F)$ を誘導するので, 任意の $p \notin S$ に対して $\rho(\mathrm{Frob}_p)$ を考えることができる．$\mathrm{Frob}_p \in G_{\mathbb{Q},S}$ 自体は well-defined ではないが, 共役の取り方のみの曖昧さなので $\rho(\mathrm{Frob}_p)$ の固有多項式 $\det(T - \rho(\mathrm{Frob}_p)) \in F[T]$ は well-defined であることに注意しよう．とくに, $\mathrm{Tr}\rho(\mathrm{Frob}_p)$ と $\det\rho(\mathrm{Frob}_p)$ は well-defined となる．

注意 7.2.3. 半単純な表現はトレースで決まる（より強く [10, 命題 2-2-7] が言える）ことと定理 7.2.1 を使えば次がわかる：ほとんどいたるところ不分岐な

Galois 表現 $\rho\colon G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(F)$ は, 半単純ならば不分岐な素点 p たちに対する $\mathrm{Tr}\rho(\mathrm{Frob}_p)$ で決定される．このことからも $\mathrm{Tr}\rho(\mathrm{Frob}_p)$（$p \notin S$）は大切な量であることがわかる．

この節の最後に, ℓ 進 Galois 表現の法 ℓ 還元について説明する．

$$\rho\colon G_{\mathbb{Q}} \to GL_n(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

を ℓ 進表現とする．このとき, 表現空間 V_ρ の基底を取り換えることにより（すなわち ρ を共役でうつすことにより）, ρ は $GL_2(\bar{\mathbb{Z}}_\ell)$ を経由するとしてよい．ρ を極大イデアル $\mathfrak{m} \subset \bar{\mathbb{Z}}_\ell$ で割ったものを

$$\rho \bmod \mathfrak{m}\colon G_{\mathbb{Q}} \to GL_n(\bar{\mathbb{F}}_\ell)$$

とおく．$\rho \bmod \mathfrak{m}$ は V_ρ の基底の取り方に依存してしまうが, 再び [10, 命題 2-2-7] によりその半単純化 $\bar{\rho}$ は基底の取り方によらず ρ のみによって定まる．$\bar{\rho}$ のことを ρ の法 ℓ 還元という．

7.3 Galois 表現の構成

§7.1 に述べたように, 本稿の目的は有限体に値を取る全射準同形

$$f\colon \mathbb{T}(k, N) \to \mathbb{F}$$

に対して $\mathbb{F}$ 係数の Galois 表現を構成するというものであった．しかし, そのためには正規化された Hecke 固有形式に対する ℓ 進表現の構成を必要とする．

7.3.1 ℓ 進 Galois 表現の構成

この節の目標は, 以下の定理について, $k \geq 2$ の場合の証明の概略を述べることである．（$k = 1$ の場合は, 本報告集の小澤氏の解説を参照せよ．）

定理 7.3.1.（$k = 2$ の場合：Eichler-志村 [8]．$k \geq 2$ の場合に拡張：Deligne[1]．$k = 1$ の場合：Deligne-Serre[2]．）

$f \in S_k(\Gamma_1(N))$ を正規化された Hecke 固有カスプ形式で指標 ϵ を持つものとし, $K_f = \mathbb{Q}(a_n(f); n \geq 1)$ を f の係数によって生成される Hecke 体とする．また, 素数 ℓ と K_f の素点 $\lambda|\ell$ を固定する．このとき, 2 次元 Galois 表現

$$\rho_{f,\lambda}\colon G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(K_{f,\lambda})$$

で以下の性質 (a)(b) を満たすものがただ一つ存在する：

(a) $\rho_{f,\lambda}$ は $N\ell$ を割らないすべての素数において不分岐である．

(b) 任意の素数 $p \nmid N\ell$ に対して, $Tr\rho_{f,\lambda}(\mathrm{Frob}_p) = a_p(f), \det\rho_{f,\lambda}(\mathrm{Frob}_p) = p^{k-1}\epsilon(p)$ が成り立つ．

注意 7.3.2. Ribet の結果 [6] により, $\rho_{f,\lambda}$ は絶対既約 (absolutely irreducible) である. したがって, 注意 7.2.3 によって, $\rho_{f,\lambda}$ の唯一性は (a)(b) から従う.

定理 7.3 の証明の方針を説明する前に, モジュラー形式に関する以下の事実を思い出しておこう.

定理 7.3.3. (1) ペアリング

$$\begin{aligned} b\colon S_k(\Gamma_1(N),\mathbb{Z})\times\mathbb{T}(k,N) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (g,T) &\mapsto a_1(Tf) \end{aligned}$$

は完全である. すなわち, 2 つの同形

$$\begin{aligned} \phi\colon S_k(\Gamma_1(N)) &\xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}-\mathrm{mod}}(\mathbb{T}(k,N),\mathbb{Z}) \\ f &\mapsto \phi_f := b(f,-) \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{T}(k,N) &\xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S_k(\Gamma_1(N),\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \\ T &\mapsto \psi_T := b(-,T) \end{aligned}$$

が導かれる.
(2) (1) の同形 ϕ は同形

$$\{f\in S_k(\Gamma_1(N))\mid f\text{ は正規化された Hecke 固有形式}\}\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Hom}_{\mathrm{rings}}(\mathbb{T}(k,N),\mathbb{C})$$

を導く.

注意 7.3.4. (1) において, 任意の $f\in S_k(\Gamma_1(N))$ と $T,T'\in\mathbb{T}(k,N)$ に対して $b(T'f,T)=b(f,T'T)$ が成り立つ. したがって, ϕ と ψ は $\mathbb{T}(k,N)$ 加群としての同形写像である.
(2) において, $\phi_f(T_n)=a_n(f)$ である.

以下, $k(\geq 2),N,f,\ell,\lambda$ を定理の仮定の通りとする. $\mathbb{T}=\mathbb{T}(k,N)$ とおく. また, 簡単のため $N>4$ と仮定する.

Step1.
まず, 定理 7.3.3(1) により, $\mathbb{T}$ 加群の同形

$$\psi\colon\mathbb{T}\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_k(\Gamma_1(N),\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$

がある.

一方, $S_k(\Gamma_1(N))$ における Petersson 内積を Atkin-Lehner 対合を用いて修正することにより, $\mathbb{T}\otimes\mathbb{C}$ 加群としての同形

$$S_k(\Gamma_1(N))\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S_k(\Gamma_1(N)),\mathbb{C})$$

が得られる.

以上の 2 つの同形（と降下）により, $S_k(\Gamma_1(N), \mathbb{Q})$ は $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$ 上の階数 1 の自由加群であることがわかる.

Step2.

$p\colon \mathbb{E} \to Y_1(N)$ を $Y_1(N)$ 上の普遍楕円曲線とし, $j\colon Y_1(N) \hookrightarrow X_1(N)$ を開埋め込みとする. $X_1(N)$ 上の層 $\mathcal{F}_k$ を

$$\mathcal{F}_k := j_* \mathrm{Sym}^{k-2} R^1 p_* \mathbb{Z}_{\mathbb{E}}$$

と定める. $\mathcal{F}_k$ に関して, 次の志村同形が重要である.

定理 7.3.5. 標準的な同形

$$\mathrm{Sh}_{k,N}\colon H^1(X_1(N), \mathcal{F}_k) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} S_k(\Gamma_1(N)) \oplus \overline{S_k(\Gamma_1(N))} \tag{7.1}$$

がある.

注意 7.3.6. $X_1(N)$ にも, Hecke 対応という幾何的起源をもつ Hecke「作用」がある.（ただし実際には作用ではなく代数的対応である.）この Hecke 対応から, コホモロジー $H^1(X_1(N), \mathcal{F}_k)$ 上に Hecke 作用素が定義される. したがって (7.1) の両辺はそれぞれ Hecke 作用素による作用を持つが, 志村同形 $\mathrm{Sh}_{k,N}$ は実際には Hecke 作用込みの同形である.

Step1 と定理 7.3.5 により, $H^1(X_1(N), \mathcal{F}_k) \otimes \mathbb{C}$ は $\mathbb{T} \otimes \mathbb{C}$ 上階数 2 の自由加群となる.（定理 7.3.1 の Galois 表現が 2 次元である理由はこのことによる.）

Step3.

ℓ 進コホモロジー $H^1_{\mathrm{et}}(X_1(N)_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}_{k,\mathbb{Q}_\ell})$ は $G_{\mathbb{Q}}$ による作用を持つ. さらに, 比較同形

$$H^1_{\mathrm{et}}(X_1(N)_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}_{k,\mathbb{Q}_\ell}) \simeq H^1(X_1(N), \mathcal{F}_k) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

と Step2 により, $H^1_{\mathrm{et}}(X_1(N)_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}_{k,\mathbb{Q}_\ell})$ は $\mathbb{T} \otimes \mathbb{Q}_\ell$ 上階数 2 の自由加群である.

Step4.

定理 7.3.3 (2) により, f は環準同形 $\phi_f\colon \mathbb{T} \to K_f$ と対応している. 係数拡大によって環準同形 $\phi_{f,\lambda}\colon \mathbb{T} \otimes \mathbb{Q}_\ell \to K_{f,\lambda}$ を得る.

$$W_{f,\lambda} := H^1_{\mathrm{et}}(X_1(N)_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}_{k,\mathbb{Q}_\ell})^\vee \otimes_{\mathbb{T}\otimes\mathbb{Q}_\ell, \phi_{f,\lambda}} K_{f,\lambda}$$

と定めると, Step3 により, $W_{f,\lambda}$ は $K_{f,\lambda}$ 上 2 次元の $G_{\mathbb{Q}}$ の表現となる. この $W_{f,\lambda}$ こそが所望の Galois 表現 $\rho_{f,\lambda}$ である.

Step5.

$W_{f,\lambda}$ が定理の (a), (b) を満たすことについて, $k=2$ の場合のみ説明する. ($k \geq 2$ の場合は [1] を参照されたい.) このとき, $\mathcal{F}_{k,\mathbb{Q}_\ell}=\mathbb{Q}_\ell$ であり,

$$W_{f,\lambda}=V_\ell J_1(N)\otimes_{\mathbb{T}\otimes\mathbb{Q}_\ell,\phi_{f,\lambda}}K_{f,\lambda}$$

である. ここで, $V_\ell J_1(N)$ は $X_1(N)$ の Jacobi 多様体 $J_1(N)$ の (有理)Tate 加群である.

$p\nmid N$ のとき $X_1(N)$ (の $\mathbb{Q}$ 上のモデル) は p において良還元を持つので, $J_1(N)$ も p で良還元を持つ. $J_1(N)$ の p での還元を $J_1(N)_{\mathbb{F}_p}$ と書く. $p\nmid N\ell$ とする. このとき, 自然な同形

$$V_\ell J_1(N)\simeq V_\ell J_1(N)_{\mathbb{F}_p}$$

がある. したがって, $V_\ell J_1(N)$ は p で不分岐な $G_{\mathbb{Q}}$ の表現であり, Frob_p の作用を考えることができる. Frob_p の作用は, 絶対フロベニウス写像 $F\colon J_1(N)_{\mathbb{F}_p}\to J_1(N)_{\mathbb{F}_p}$ から $V_\ell J_1(N)_{\mathbb{F}_p}$ に誘導される作用と等しいことに注意しよう. 一方, $X_1(N)$ 上の Hecke 対応は $J_1(N)_{\mathbb{F}_p}$ 上の Hecke 作用素を定める. 次の定理によって, $J_1(N)$ 上の Hecke 作用素 T_p は $J_1(N)_{\mathbb{F}_p}$ の絶対フロベニウス写像 F と Vershiebung V ($VF=FV=[p]$ となる射) によって記述される：

定理 7.3.7. (Eichlelr-志村合同関係式) $\mathrm{End}(J_1(N)_{\mathbb{F}_p})$ の中で

$$T_p=F+\langle p\rangle V$$

が成り立つ.

定理 7.3.7 によって, $J_1(N)_{\mathbb{F}_p}$ 上で

$$F^2-T_pF+\langle p\rangle p=0$$

が成り立つ. したがって, $V_\ell J_1(N)(\simeq V_\ell J_1(N)_{\mathbb{F}_p})$ 上で

$$\mathrm{Frob}_p^2-T_p\mathrm{Frob}_p+\langle p\rangle p=0$$

である. ゆえに, $W_{f,\lambda}$ 上では

$$\mathrm{Frob}_p^2-a_p(f)\mathrm{Frob}_p+\epsilon(p)p=0$$

である. ($\phi_f(T_p)=a_p(f)$ であることに注意せよ.) これより,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p;W_{f,\lambda})=a_p(f),\det(\mathrm{Frob}_p;W_{f,\lambda})=\epsilon(p)p$$

となる. (実際はこの説明はごまかしであり, 本来ならば [7, Theorem 3.7] のような議論をする必要があると思われる.)

7.3.2 法 ℓ Galois 表現の構成

定理 7.3.8. N, k を正の整数とし，ℓ を素数とする．$\mathbb{F}$ を標数 ℓ の有限体とし，全射準同形 $f\colon \mathbb{T}(k,N) \to \mathbb{F}$ が与えられているとする．このとき，半単純な法 ℓGalois 表現

$$\rho_f\colon G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{F})$$

で以下を満たすものが存在する：ρ_f は $N\ell$ の外で不分岐であり，$N\ell$ を割らない任意の素数 p に対して

$$\mathrm{Tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_p)) = f(T_p), \quad \det(\rho_f(\mathrm{Frob}_p)) = f(\langle p\rangle)p^{k-1}$$

が成り立つ．

証明. $\mathfrak{m} = \ker f$ とおく．$\mathfrak{m}$ に含まれる $\mathbb{T}(k,N)$ の極小素イデアル $\mathfrak{q}$ を取る．$\mathbb{T}(k,N)/\mathfrak{q}$ の商体を K とおけば，K は代数体である．自然な射 $\mathbb{T}(k,N) \to K$ を ϕ とおく．定理 7.3.3 (2) によって ϕ と対応する Hecke 固有形式を f とする．また，$\phi(\mathfrak{m})$ を割る K の素点を λ とする．定理 7.3.1 によって K_λ 係数の ℓ 進 Galois 表現が得られるので，その法 ℓ 還元を ρ_f とすればよい． □

謝辞

講演のお声をかけてくださり，また時間のすくないなかで講演者や参加者に様々な配慮をしてくださったオーガナイザーの木村先生と横山先生に，この場をお借りして御礼申し上げます．また，講演について励ましのお言葉を下さった北海道大学の中村郁先生，参考文献についてアドバイスをくださった大阪大学の落合理先生（しかし時間が足りずアドバイスを反映できておりません．申し訳ありません．）に深く感謝いたします．

参考文献

[1] P. Deligne, *Formes modulaires et representations ℓ-adiques*, Sminaire Bourbaki vol. 1968/69 Exposs 347-363. Springer, Berlin, Heidelberg, 1971. 139-172.

[2] P. Deligne and J-P. Serre, *Formes modulaires de poids* 1. Annales scientifiques de l'cole Normale Suprieure. Vol. 7. No. 4. Elsevier, 1974.

[3] F. Diamond and J. Im, *Modular forms and modular curves*, Seminar on Fermat's Last Theorem (Toronto, ON, 19931994), CMS Conf. Proc. , vol. 17, Amer. Math. Soc. , Providence, RI, 1995, pp. 39133.

[4] B. Edixhoven and J. -M. Couveignes (eds.), *Computational aspects of modular forms and Galois representations*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press (2011), 440pp. Also available from arXiv:math/0605244.

[5] 落合理, 岩澤理論とその展望（下）, 岩波数学叢書, 岩波書店, 2016.

[6] K. A Ribet, *Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus*, Modular functions of one variable V. Springer, Berlin, Heidelberg, 1977. 18-52.

[7] T. Saito, *Galois representations and modular forms*, available at http://www. ms. u-tokyo. ac. jp/ t-saito/talk/eepr. pdf

[8] G. Shimura, *On the periods of modular forms.* Mathematische Annalen 229.3 (1977): 211-221.

[9] R. Taylor, *Galois representations*, Annales de la Facult des sciences de Toulouse: Mathmatiques. Vol. 13. No. 1. Universit Paul Sabatier, Institut de Mathmatiques, 2004.

[10] 山内卓也, ガロア表現の基礎 *I*, 第１７回（２００９年度）整数論サマースクール「l 進ガロア表現とガロア変形の整数論」報告集